

Evaluation du cours

Votre évaluation et vos suggestions sont essentielles à l'amélioration du contenu des cours offerts au sein de l'EPFL. Comme le cours de physique est donné dans deux auditoriums en parallèle, le lien vers le questionnaire n'a pas pu être centralisé avec vos autres cours. Nous vous prions donc de bien vouloir utiliser un des deux liens suivants, en fonction du cours que vous avez suivi la plupart du temps :

Cours de Christophe Galland : <https://cape-quest.epfl.ch/evasys/online.php?p=TQ29W>



Cours de Stefano Rusponi : <https://cape-quest.epfl.ch/evasys/online.php?p=QFQ5D>



Nous vous remercions pour le temps accordé à cette évaluation, qui est bien sûr **anonyme**.

Nous en profitons pour attirer votre attention sur le fait que de nombreuses ressources sont désormais à votre disposition dans Moodle, section "Examen Récents", pour vous aider dans la préparation de l'examen. Nous vous encourageons à ne pas regarder les corrections d'examen sans avoir sérieusement essayé de les résoudre.

Stefano Rusponi et Christophe Galland

8.4: Théorème de l'énergie pour un solide

1) La variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

Les forces intérieures ne travaillent pas parce que les distances sont maintenues.

Pour chaque couple de points i, j du solide on a que $\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$ (3eme loi de Newton), donc:

$$\vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{j,i} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_i - \vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{i,j} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0$$

$d\vec{r}_{ij} = 0$: dans un solide indéformable les distances sont maintenues

2) Si il n'y a que des **forces conservatives** qui travaillent, alors l'énergie mécanique est conservée

$$E = K + V(\vec{r}) = \text{constante}$$

$$\vec{F} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

8.4 Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide:

$$E_{cin} = K = \frac{1}{2} m v_A^2 + m \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega})$$

N.B.: pour chaque point P, A du solide

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt} (\vec{r}_A + \overrightarrow{AP}) = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b})^2 &= a^2 b^2 \sin^2 \alpha \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= a^2 b^2 \cos^2 \alpha \\ \Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= a^2 b^2 \end{aligned}$$

$$(\tilde{I}_G)_{ij} =$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 \delta_{ij} - (GP_{\alpha})_i (GP_{\alpha})_j]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{\omega}^2 \left(\overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 - \left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_{i,j} \omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 - \sum_{i,j} \omega_i \omega_j (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j (\tilde{I}_A)_{ij} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}) \end{aligned}$$

8.4 Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide:

$$E_{cin} = K = \frac{1}{2} m v_A^2 + m \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega})$$

Dans un repéré d'inertie:

$$\vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}) = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3) \cdot \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2$$

Si la rotation se fait autour d'un axe principal d'inertie (par ex. axe \hat{e}_1):

$$\vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}) = I_1 \omega_1^2$$

8.4 Energie cinétique d'un solide

- Pour un point A quelconque du solide:

$$E_{cin} = K = \frac{1}{2} m v_A^2 + m \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_A \cdot \vec{\omega})$$

Cas particuliers avec $\vec{\omega}$ parallèle à un axe principal d'inertie:

- Si $\vec{v}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{I}_{\Delta_A} \omega \hat{e}_\Delta = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_A} \omega^2$

- Si $A = G \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} M v_g^2 + \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_G} \omega^2$

$M \vec{v}_G \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GG}) = 0$



$$K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2$$
$$K^* = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta_G} \omega^2$$

2eme théorème de König

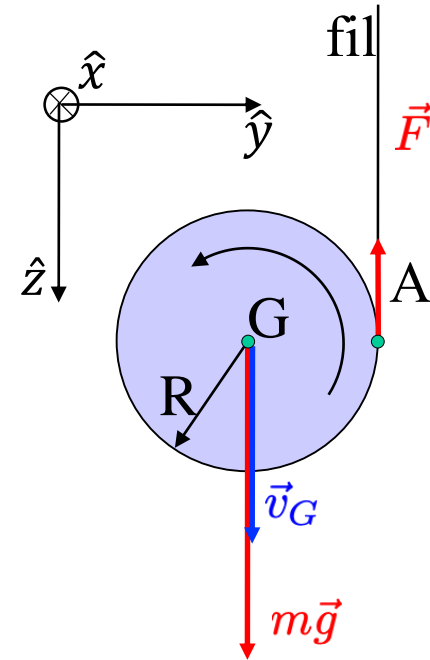
8.4: Yoyo: solution 1

Quelle est la vitesse du centre de masse G quand le yoyo est descendu d'une hauteur h ?

- Equations du mouvement :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G = -RF\hat{x} \quad \Rightarrow \quad -RF\hat{x} = \frac{d(-I_G\omega\hat{x})}{dt} = -I_G\dot{\omega}\hat{x} = -\frac{1}{2}mR^2\frac{a_G}{R}\hat{x}$$

$$\Downarrow$$
$$F = \frac{1}{2}ma_G$$
$$F = mg - ma_G \quad \Rightarrow \quad a_G = \frac{2}{3}g$$



- Conditions initiales (à $t = 0$) : $v_G = 0$ $z = 0$

- Solution :

$$v_G(t) = a_G t$$
$$z(t) = \frac{1}{2}a_G t^2$$

$$v_G(z) = \sqrt{2a_G z} \quad \Rightarrow \quad v_G(h) = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

8.4: Yoyo: solution 2

Quelle est la vitesse du centre de masse G quand le yoyo est descendu d'une hauteur h ?

Le poids est conservatif et \vec{F} ne travaille pas
 \Rightarrow le problème peut être résolu par la conservation de l'énergie :

$$K_{in} + V_{in} = K_{fin} + V_{fin}$$

$$K_{in} = 0 \quad V_{in} = mgz(0) = 0 \quad V_{fin} = -mgz$$

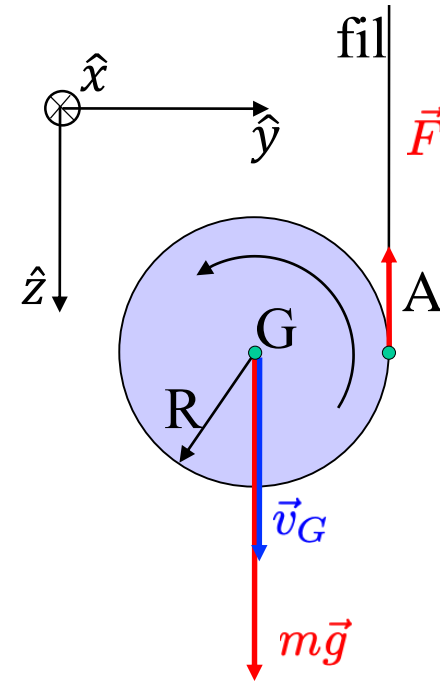
Par rapport à G

$$\begin{aligned} K_{fin} &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v_G}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv_G^2 \end{aligned}$$

Par rapport à A

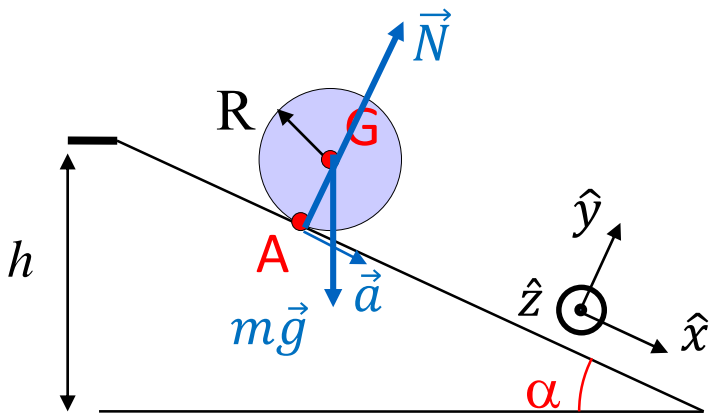
$$\begin{aligned} K_{fin} &= \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\left(\frac{v_G}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv_G^2 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4}mv_G^2 - mgz = 0 \quad \Rightarrow \quad v_G(h) = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$



8.4-8.5: Glissement vs. Roulement

A quelle vitesse les deux sphères arrivent au fond de la pente de longueur L ?



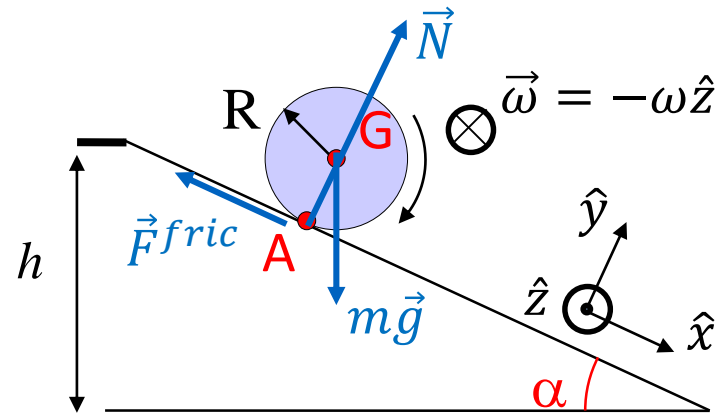
La sphère qui glisse descend avec une accélération

$$a_G = g \sin \alpha$$

$$L = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} a_g t^2$$

$$v_G = a_G t$$

$$v_G = \sqrt{2La_G} = \sqrt{2Lg \sin \alpha} = \sqrt{2gh}$$



sphère qui roule (sans glisser):
théorème du moment cinétique appliqué en A

$$v_G = \omega R \quad \vec{L}_A = I_A \vec{\omega} \quad I_A = I_{Gz} + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2$$

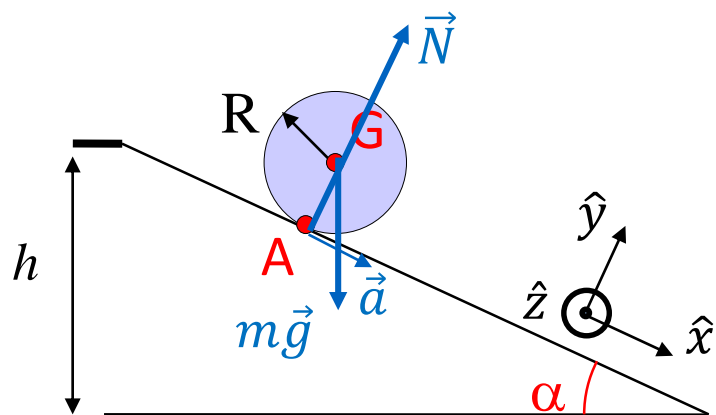
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -I_A \dot{\omega} \hat{z} = -I_A \frac{a_G}{R} \hat{z} \quad (I_{Gz} = \frac{2}{5} mR^2)$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{7}{5} mRa_G = -Rmg \sin \alpha \end{cases}$$

$$a_G = \frac{5}{7} g \sin \alpha \quad v_G = \sqrt{2La_G} = \sqrt{\frac{10}{7} Lg \sin \alpha} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

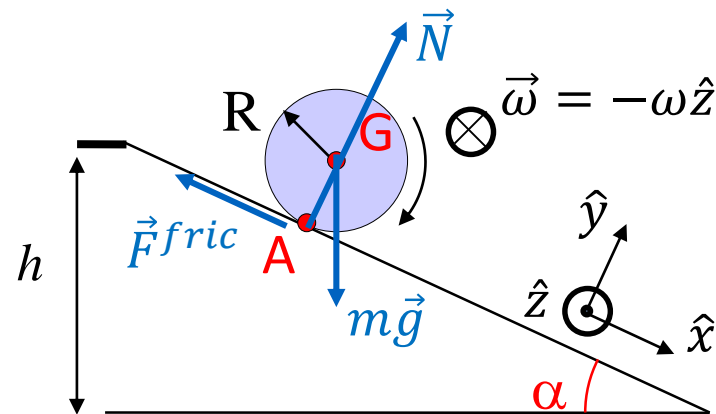
8.4-8.5: Glissement vs. Roulement

A quelle vitesse les deux sphères arrivent au fond de la pente de longueur L ?



La sphère qui glisse:

- $\vec{N} \perp d\vec{r}$ donc ne travaille pas
- $m\vec{g}$ est conservative



sphère qui roule (sans glisser):

- $\vec{N} \perp d\vec{r}$ donc ne travaille pas
- \vec{F}^{fric} ne travaille pas parce que $v_A = 0$
- $m\vec{g}$ est conservative

• Energie mécanique totale est conservée: $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = K + V = const$

$$K_i = 0 \quad K_f = \frac{1}{2} m v_G^2$$

$$V_i = 0 \quad V_f = -mgh$$

$$\frac{1}{2} m v_G^2 - mgh = 0$$

$$v_G = \sqrt{2gh}$$

Par rapport à G:

$$K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2$$

$$K^* = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta G} \omega^2$$

$$K_i = 0 \quad V_i = 0 \quad V_f = -mgh$$

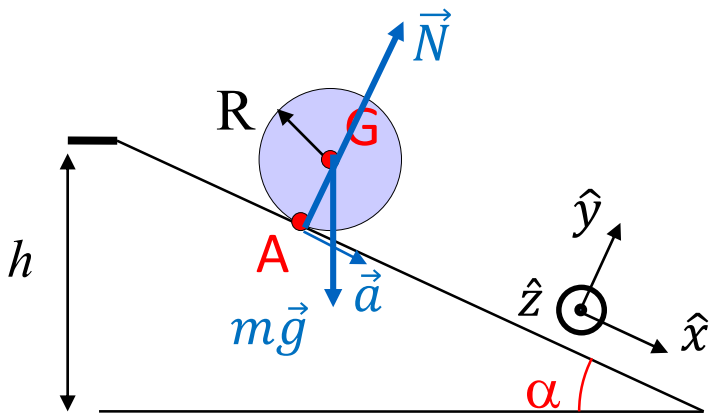
$$(I_{Gz} = \frac{2}{5} m R^2; v_G = \omega R)$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} \omega^2 = \frac{1}{2} (1 + \frac{2}{5}) m v_G^2$$

$$\frac{7}{10} m v_G^2 - mgh = 0 \quad \Rightarrow \quad v_G = \sqrt{10/7 gh}$$

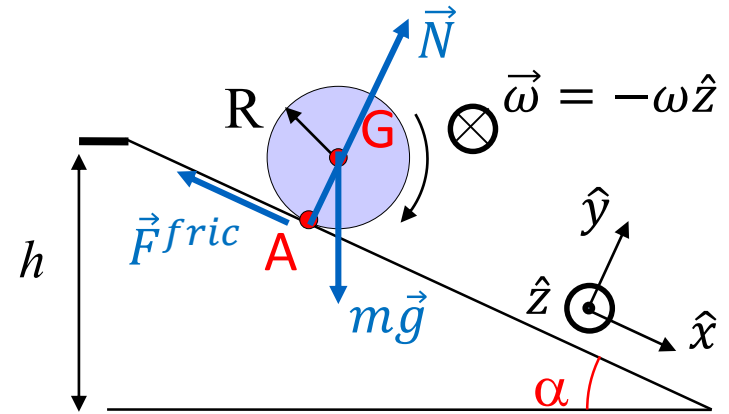
8.4-8.5: Glissement vs. Roulement

A quelle vitesse les deux sphères arrivent au fond de la pente de longueur L ?



La sphère qui glisse:

- $\vec{N} \perp d\vec{r}$ donc ne travaille pas
- $m\vec{g}$ est conservative



sphère qui roule (sans glisser):

- $\vec{N} \perp d\vec{r}$ donc ne travaille pas
- \vec{F}^{fric} ne travaille pas parce que $v_A = 0$
- $m\vec{g}$ est conservative

• Energie mécanique totale est conservée: $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = K + V = const$

$$K_i = 0 \quad K_f = \frac{1}{2} m v_G^2$$

$$V_i = 0 \quad V_f = -mgh$$

$$\frac{1}{2} m v_G^2 - mgh = 0$$

$$v_G = \sqrt{2gh}$$

Par rapport à A: $\vec{v}_A = 0$

$$K_f = \frac{1}{2} \tilde{I}_{\Delta A} \omega^2$$

$$K_i = 0 \quad V_i = 0 \quad V_f = -mgh$$

$$I_A = I_{Gz} + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2$$

$$(I_{Gz} = \frac{2}{5} mR^2; v_G = \omega R)$$

$$\frac{7}{10} m v_G^2 - mgh = 0 \quad \Rightarrow \quad v_G = \sqrt{10/7 gh}$$

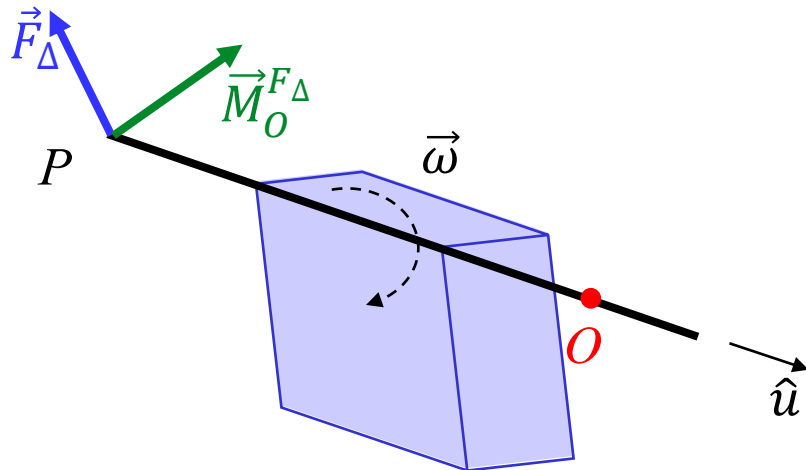
8.6: Dynamique du solide avec axe fixe

- Quand un axe de rotation Δ est fixe (et qu'on ne s'intéresse pas aux forces et moments qui maintiennent cet axe fixe), il est utile de projeter le théorème du moment cinétique sur cet axe:

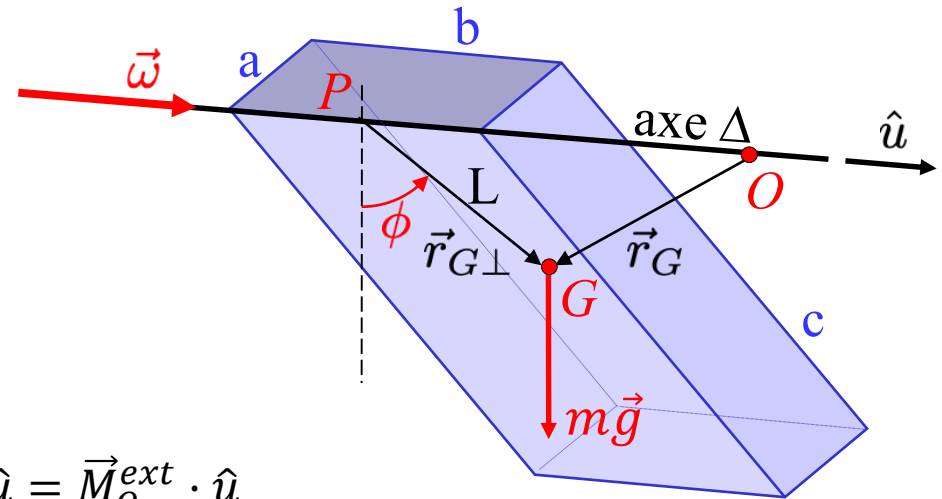
- Pour tout point O sur l'axe Δ , de direction \hat{u} , les forces \vec{F}_Δ agissantes sur l'axe ont un moment perpendiculaire à $\hat{u} \Rightarrow$

$$\vec{M}_O^{F_\Delta} \cdot \hat{u} = (\overline{OP} \wedge \vec{F}_\Delta) \cdot \hat{u} = 0$$

$$\overline{OP} = |\overline{OP}| \hat{u}$$



- Ex.: pendule physique = solide soumis à la pesanteur et libre de osciller autour d'un axe fixe horizontal



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \hat{u} = \vec{M}_O^{ext} \cdot \hat{u}$$

$$I_\Delta \dot{\omega} = (\overline{OG} \wedge m\vec{g}) \cdot \hat{u} = (\overline{OP} \wedge m\vec{g}) \cdot \hat{u} + (\overline{PG} \wedge m\vec{g}) \cdot \hat{u}$$

$$I_\Delta \ddot{\phi} = (\overline{PG} \wedge m\vec{g}) \cdot \hat{u} = -Lmg \sin \phi$$

$$\ddot{\phi} + \frac{mgL}{I_\Delta} \sin \phi = 0$$

$$I_\Delta = I_{G,u} + md^2 = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2) + mL^2$$

- pendule mathématique:
toute la masse m
est en G ($I_\Delta = mL^2$)

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

8.6: Dynamique du solide avec axe fixe

Conservation énergie mécanique

$$V = -mgL \cos \phi$$

$$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{G,u}\omega^2 = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{G,u}\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(mL^2 + I_{G,u})\omega^2$$

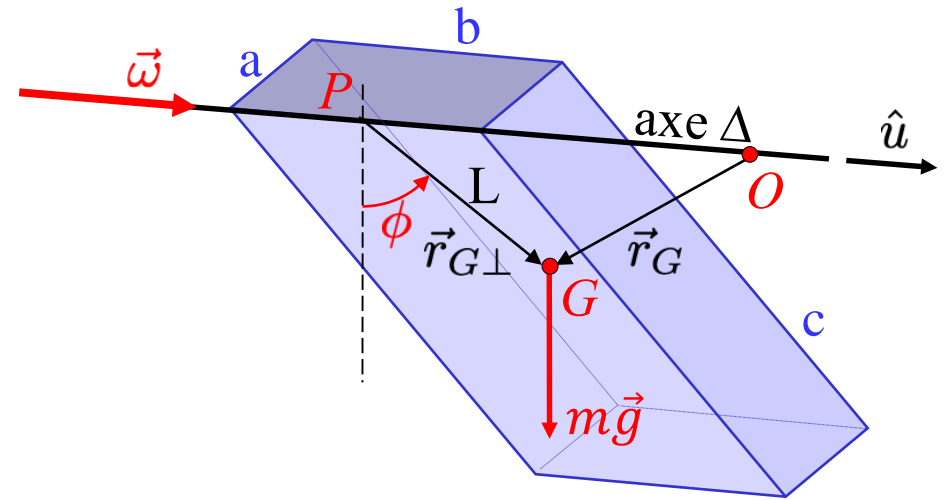
$$\frac{1}{2}(mL^2 + I_{G,u})\omega^2 - mgL \cos \phi = cte$$

On dérive par rapport à t ($\omega(t) = \dot{\phi}(t)$)

$$(mL^2 + I_{G,u})\dot{\phi}\ddot{\phi} + mgL \sin \phi \dot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\phi} + \frac{mgL}{I_{\Delta}} \sin \phi = 0$$

Théorème du moment cinétique



$$I_{\Delta}\dot{\omega} = (\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}) \cdot \hat{u} = (\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{g}) \cdot \hat{u} + (\overrightarrow{PG} \wedge m\vec{g}) \cdot \hat{u}$$

$$I_{\Delta}\ddot{\phi} = (\overrightarrow{PG} \wedge m\vec{g}) \cdot \hat{u} = -Lmg \sin \phi$$

$$\ddot{\phi} + \frac{mgL}{I_{\Delta}} \sin \phi = 0$$

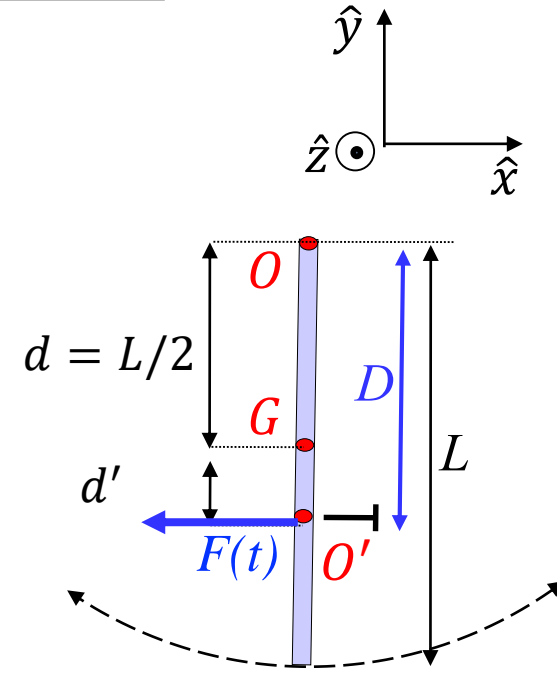
$$I_{\Delta} = I_{G,u} + md^2 = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) + mL^2$$

8.6: Calcul du centre de percussion

- Pendule physique interrompu dans sa course:

- Une barre de longueur L et masse M tourne autour d'un axe fixe perpendiculaire à la feuille et passant par le point O à l'extrémité de la barre:
- Juste avant le choc ($t = 0$): $v_G = \omega d$,
- Juste après le choc ($t = \Delta t$): $v_G = 0, \omega = 0$ (point G fixe)
- A quelle distance D de O il faut appliquer la buttée pour que la barre s'arrête sans avoir de extra forces appliquées en O ?

La force appliquée par la buttée ainsi que la durée du choc sont inconnus, mais on peut écrire:



$$\Delta p_x = 0 - Mv_G = \int_0^{\Delta t} -F(t)dt$$

$$Mv_G = \int_0^{\Delta t} F(t)dt$$

$$I_G \omega = d' Mv_G = d' M \omega d$$

$$\Delta L_{G,z} = 0 - I_G \omega = \vec{M}_G^{ext} \cdot \hat{e}_z \Delta t = -d' \int_0^{\Delta t} F(t)dt$$

$$I_G \omega = d' \int_0^{\Delta t} F(t)dt$$

$$I_G = d' d M = \frac{L}{2} d' M$$

$$I_G = \frac{1}{12} M L^2 = \frac{L}{2} d' M \quad \Rightarrow \quad d' = \frac{L}{6} \quad \Rightarrow \quad D = d + d' = \frac{2}{3} L$$

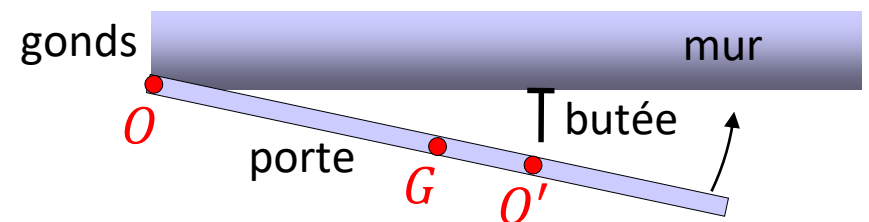
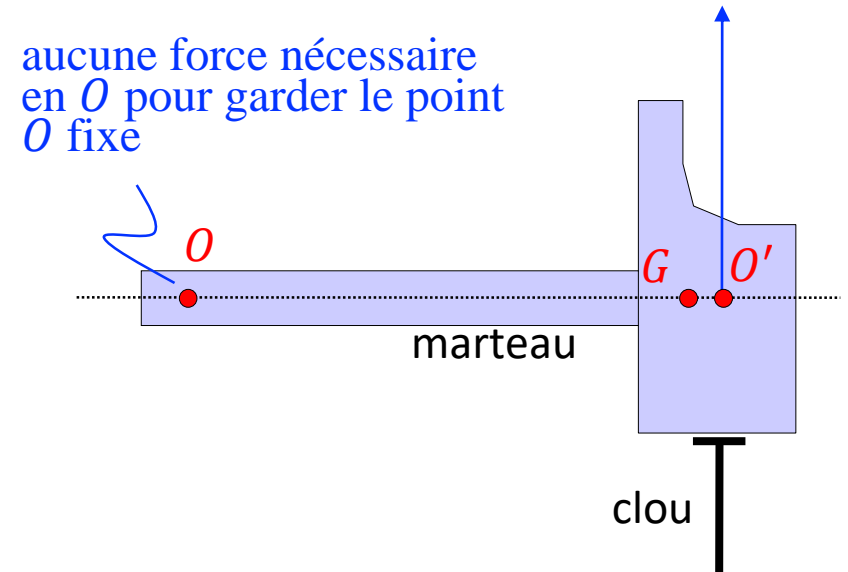
8.6: Calcul du centre de percussion

- Solide libre de tourner autour d'un axe fixe passant par O
- Centre de percussion:
 - point O' sur la droite OG tel qu'un choc (percussion) appliqué en ce point (perpendiculairement à OG) n'engendre aucune réaction (répercussion) de l'axe de rotation sur le solide

- Exemples et applications:

- Marteau
 - où le tenir ?
- Raquette de tennis, batte de baseball,
 - où frapper la balle ?
- Butée de porte
 - où la placer ?

force exercée par le clou sur le marteau



butée placée au centre de percussion:
aucune force appliquée sur les gonds
(charnières)

8.7: Rotation autour d'un axe fixe

- Toupie symétrique avec un point fixe:
 - Le moment du poids par rapport au point fixe C est constamment perpendiculaire au moment cinétique \Rightarrow la norme du moment cinétique reste constante: $\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega} = I_\Delta \omega \hat{e}_\Delta$
 - L'axe de rotation propre a un **mouvement de précession** autour de l'axe vertical avec vitesse angulaire Ω

$$\vec{M}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} = I_\Delta \omega \frac{d\hat{e}_\Delta}{dt} = I_\Delta \omega \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_\Delta = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_C$$

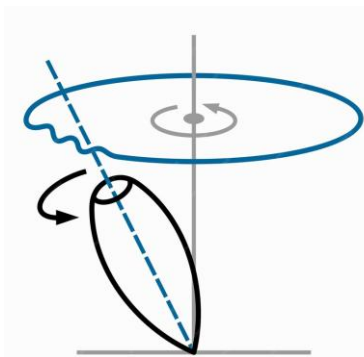
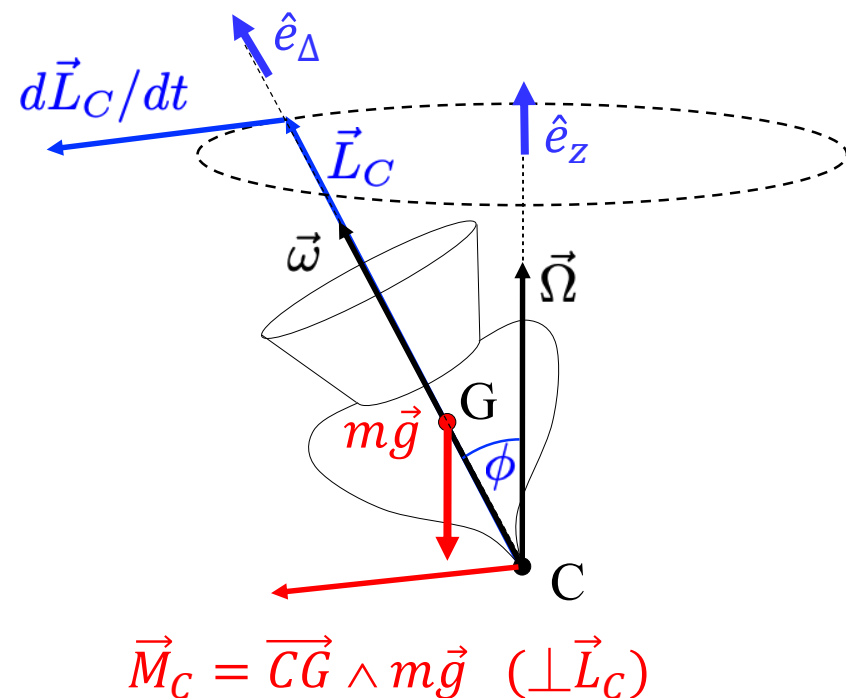
- Note: on a négligé le moment cinétique causé par la rotation Ω ($\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \cong \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = I_\Delta \omega \hat{e}_\Delta$) ! valable si $\Omega \ll \omega$

$$CG mg \sin \phi = \Omega L_C \sin \phi$$

$$\Omega = \frac{CG mg}{L_C} = \frac{CG mg}{I_\Delta \omega}$$

La vitesse de précession est inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre de la toupie

- Cas général: ϕ n'est pas constant mais oscille entre deux extrêmes (**mouvement de nutation**)



8.6 Pendule physique tournant: angle d'équilibre

- Rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe passant par O . Tige de rayon $R \approx 0$
- Dans repère d'inertie $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$
- Par la formule de Steiner

$$\tilde{I}_O = \tilde{I}_G + m \begin{pmatrix} \frac{L^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega \sin \alpha \hat{e}_1 - \omega \cos \alpha \hat{e}_2$$

$$\vec{L}_O = \tilde{I}_O \cdot \vec{\omega} = \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} \right) \omega \sin \alpha \hat{e}_1$$

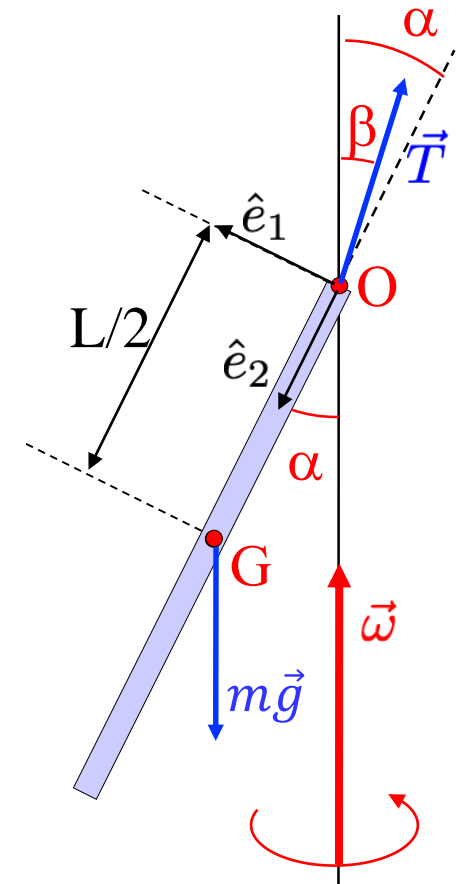
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \omega \wedge \vec{L}_O = \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} \right) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \hat{e}_3$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{L}{2} mg \sin \alpha \hat{e}_3$$

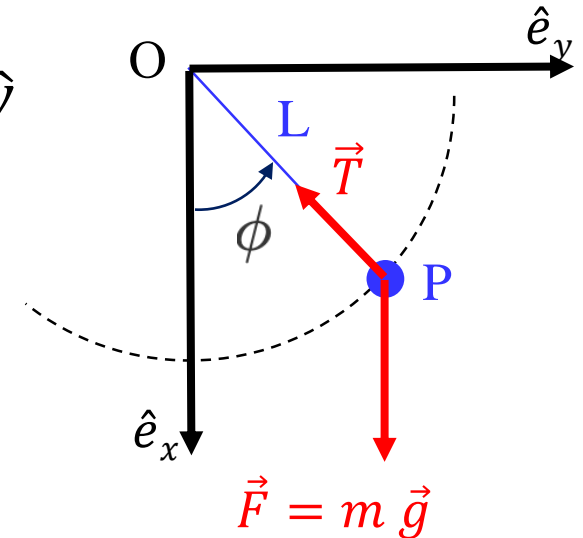
$$\frac{L}{2} mg \sin \alpha = \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} \right) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{mL^2}{3} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L\omega^2}$$



8.6 pendule mathématique: angle d'équilibre

Repère cartésien fixe: $O\hat{x}\hat{y}$



2^{ème} loi de Newton $\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{T} \cdot \hat{e}_x + m \vec{g} \cdot \hat{e}_x = 0 \\ \vec{T} \cdot \hat{e}_y + m \vec{g} \cdot \hat{e}_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T \cos \phi + m g = 0 \\ T \sin \phi = m \dot{\phi}^2 L \sin \phi = m \omega^2 L \sin \phi \end{cases}$$

$$-m \omega^2 L \cos \phi + m g = 0 \Rightarrow \cos \phi = \frac{g}{L \omega^2}$$

L'angle d'équilibre est inférieur à celui d'un pendule physique: $\cos \phi = \frac{3}{2} \frac{g}{L \omega^2}$

Formule générale pour une barre de rayon fini $\cos \phi = \frac{g}{L \omega^2} \frac{1}{1 + \frac{I_{\perp} - I_{\parallel}}{m L^2}}$

8.6 Pendule physique tournant: angle d'équilibre

- Rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe passant par O
- Dans repère d'inertie $G\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$

$$\vec{\omega} = \omega \sin \alpha \hat{e}_1 - \omega \cos \alpha \hat{e}_2$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{12} mL^2 \omega \sin \alpha \hat{e}_1$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \omega \wedge \vec{L}_G = \frac{1}{12} mL^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \hat{e}_3$$

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} mL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} mL^2 \end{pmatrix}$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{GO} \wedge \vec{T} = \frac{L}{2} T \sin(\alpha - \beta) \hat{e}_3 = \frac{L}{2} T (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \hat{e}_3$$

- Théorème du centre de masse :

$$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \begin{cases} T \cos \beta = mg \\ T \sin \beta = m\omega^2 \frac{L}{2} \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \tan \beta = \frac{\omega^2 L}{2g} \sin \alpha$$

$$\frac{1}{12} mL^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{L}{2} (mg \sin \alpha - \cos \alpha m\omega^2 \frac{L}{2} \sin \alpha)$$

$$\frac{1}{3} L^2 \omega^2 \cos \alpha = \frac{L}{2} g \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L\omega^2}$$

